МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное

образовательное учреждение высшего образования

«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук

Кафедра «Вычислительная техника»

|  |
| --- |
| Утверждено на заседании кафедры  «Вычислительная техника»  «29» января 2019г., протокол №6 |
| Заведующий кафедрой  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_А.Н. Ивутин |

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

**по выполнению курсовой работы**

**по дисциплине (модулю)**

**«Численные методы»**

**на тему «Методы решения дифференциальных уравнений»**

**основной профессиональной образовательной программы**

**высшего** **образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки

09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»

с направленностью (профилем)

**«Электронно-вычислительные машины, комплексы, системы и сети»**

Формы обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 090301-02-19

Тула 2019 год

**Разработчик(и) методических указаний**

**Разработчик(и):**

\_\_\_\_Трошина А.Г., доцент, к.т.н.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) (подпись)

1. **Цель и задачи работы**

Получить навык

- анализа различных численных методов решения дифференциальных уравнений;

- разработки программных средств для решения численными методами дифференциальных уравнений.

**2. Теоретические положения**

Дифференциальными называются уравнения, в которых неизвестными являются функции, которые входят в уравнения вместе со своими производными.

Если в уравнение входит неизвестная функция только одной переменной, уравнение называется обыкновенным. Если нескольких – уравнением в частных производных.

Порядком дифференциального уравнения называют наивысший порядок производной, входящей в уравнение.

Решить дифференциальное уравнение, значит найти такую функцию подстановка которой в уравнение обращала бы его в тождество.

***Метод последовательных приближений (метод Пикара)***

Пусть дано уравнение

, (2.1)

правая часть, которого в прямоугольнике  непрерывна и имеет непрерывную частную производную по *у*. Требуется найти решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальному условию

 . (2.2)

Интегрируя обе части уравнения от до получим



или

. (2.3)

Уравнение (2.1) заменяется интегральным уравнением (2.3), в котором неизвестная функция *у* находится под знаком интеграла. Интегральное уравнение (2.3) удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.1) и начальному условию (2.2). Действительно,

.

Заменяя в равенстве (2.3) функцию *у* значением , получим первое приближение

.

Затем в уравнении (2.3) заменив *у* найденным значением , получаем второе приближение:

.

Продолжая процесс далее, последовательно находим

,

…

.

Таким образом, составляем последовательность функций

.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.1.** *Пусть в окрестности точки  функция f(х,у) непрерывна и имеет ограниченную частную производную . Тогда в некотором интервале, содержащем точку , последовательность  сходится к функции у(х), служащей решением дифференциального уравнения у = f(x,y) и удовлетворяющей условию*

*у(х0) = у0.*

Оценка погрешности метода Пикара определяется, но формуле

,

где  при ;  - постоянная Липшица для области ;  - величина определения окрестности ; *a* и *b* – границы области *R*.

Пример 1. Найти решение задачи Коши методом Пикара:



Найдём несколько приближений по методу Пикара. Пусть , тогда:









Как легко видеть

,

то есть при  получим разложение в ряд функции  или , что является аналитическим решением задачи.

**Метод последовательного дифференцирования.**

Пусть дано дифференциальное уравнение *n*-го порядка:

 (2.4)

с начальными условиями

. (2.5)

Представим решение  уравнения (2.4) в окрестностях точки х0 в виде ряда Тейлора:

 (2.6)

где , а *h* – достаточно малая величина.

Для нахождения коэффициентов ряда (2.6) уравнение (2.4) дифференцируют по *х* нужное число раз, используя условия (2.5):







Если, то получается ряд Тейлора по степеням *х*:

 (2.7)

***Этот метод редко применяется на практике, поскольку при достаточно большом n он слишком громоздок, а кроме того, при достаточном удалении х от х0 остаточный член может не стремиться к нулю.***

Пример 2. Найти решение задачи Коши методом последовательного дифференцирования:



Решение







Тогда, подставив полученные значения в (2.7), получим ответ:

 .

**Метод неопределенных коэффициентов.**

Пусть дано дифференциальное уравнение

, (2.8)

с начальным условием .

Метод неопределенных коэффициентов состоит в том, что решение уравнения (2.8) отыскивают в виде ряда с неизвестными коэффициентами

 (2.9)

которые находят с помощью подстановки ряда (2.9) в уравнение (2.8), зачем приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях *х* и используют начальное условие. Найденные значения коэффициентов  подставляют в ряд (2.8).

Пример 3. Найти решение дифференциального уравнения *у"* + *ху =* 0 такое, что *у* = 0 и *y'* = 1 при *х* = 0. Из теории дифференциальных уравнений следует, что такое решение существует и имеет вид степенного ряда

у = х + c2x2 + c3x3 + c4x4 + c5x5 + ….

Подставляя это выражение вместо *у* в правую часть уравнения, а вместо *y*" — выражение

2c2 + 3·2с3х + 4·3с4х2 + 5·4с5х3 + …,

затем, умножая на *х* и соединяя члены с одинаковыми степенями *х,* получим:

2c2 + 3·2c3x + (1 + 4·3c4) x2 + (c2 + 5·4c5) x3 + … = 0,

откуда при определении неизвестных коэффициентов получается бесконечная система уравнений: 2c2 = 0; 3·2с3 = 0; 1 + 4·3c4 = 0; c2 + 5·4c5 = 0;...

Решая последовательно эти уравнения,



т. е.



**Метод Эйлера**

Решить дифференциальное уравнение  численным методом - это значит для заданной последовательности аргументов  и числа , не определяя функцию *у = F(x),* найти такие значения  что  (*i = 1,2,...,n*) и .

Таким образом, численные методы позволяют вместо нахождения функции *у = F(x)* получить таблицу значений этой функции для заданной последовательности аргументов. Величина  называется *шагом интегрирования*. Рассмотрим некоторые из численных методов.

Метод Эйлера является сравнительно грубым и применяется в основном для ориентировочных расчетов.

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

, (2.10)

с начальным условием

. (2.11)

Требуется найти решение уравнения (2.10) на отрезке [а, b].

Разобьем отрезок [а,b] на n равных частей и получим последова­тельность , где  (*i = 1, 2,..., n*), a  - шаг интегрирования.

Выберем *k*-й участок  и проинтегрируем уравнение (2.10):

. (2.12)

Тогда формула (2.12) примет вид

 (2.13)

Обозначив,  т.е. , получим

 (2.14)

Продолжая этот процесс и каждый раз принимая подынтегральную функцию на соответствующем участке постоянной и равной ее значению в начале участка, получим таблицу решений дифференциального уравнения на заданном отрезке [а, b].

Если функция *f(x,y)* в некотором прямоугольнике



удовлетворяет условию

 (*N = const*) (2.15)

и, кроме того.

 (*М = const*) (2.16)

то имеет место следующая оценка погрешности:

, (2.17)

где  - значение точного решения уравнения (5.61) при ,а  - приближенное значение, полученное на *n*-м шаге.

Формула (2.17) имеет в основном теоретическое применение. На практике, как правило, применяют "двойной просчет". Сначала расчет ведется с шагом *h*, затем шаг дробят и повторный расчет ведется с шагом . Погрешность более точного значения  оценивается формулой

 (2.18)

***Пример:***



Решение:

Разобьём отрезок на n частей (n=4): , *i=1,…,n-1*

*h=0,25*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | x0 | x1 | x2 | x3 | x4 |
| x | 0 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1 |

Далее по формуле (2.15) получим текущие значения *yi*:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1 |
| y | 1 | 1 | 67/64  (1,05) | 1139/1024  (1,11) | 76313/ 65536 (1,16) |
| f(x,y) | 0 | 3/16  (0,19) | 67/256  (0,26) | 3417/16386  (0,21) |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **X** | **Y(x)** | **Ряд** | **Эйлера** |
| **0** | **1** | **1** | **1** |
| **0,25** | **1,026384** | **1,026042** | **1** |
| **0,5** | **1,086904** | **1,083333** | **1,046875** |
| **0,75** | **1,150993** | **1,140625** | **1,112305** |
| **1** | **1,18136** | **1,166667** | **1,164444** |

Метод Эйлера может быть применен к решению систем дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений высших порядков. Однако в последнем случае дифференциальные уравнения должны быть приведены к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

Пусть задана система двух уравнений первого порядка

 (2.19)

с начальными условиями

,  (2.20)

Приближенные значения  и  находятся по формулам

,  (2.21)

где ,  (*i = 0,1,2,…*). (2.22)

**Метод Рунге-Кутта**

Метод Рунге-Кутта является одним из методов повышенной точности. Он имеет много общего с методом Эйлера.

Пусть на отрезке [а, b] требуется найти численное решение уравнения

, (2.23)

с начальным условием

**.** (2.24)

Разобьем отрезок [а, b] на *n* равных частей точками    
(*i = 1,2,..., n*, a  - шаг интегрирования). В методе Рунге-Кутта, так же, как и в методе Эйлера, последовательные значения у, искомой функции у определяются по формуле

. (2.25)

Если разложить функцию *у* в ряд Тейлора и ограничиться членами до  включительно, то приращение функции  можно представить в виде

, (2.26)

где производные , ,  находят последовательным дифференцированием из уравнения (2.25).

Вместо непосредственных вычислений по формуле (2.25) методом Рунге-Кутта определяют четыре числа:

 (2.27)

Можно доказать, что если числам  придать соответственно веса 1/6; 1/3; 1/3; 1/6, то средневзвешенное этих чисел, т.е.

 (2.28)

с точностью до четвертых степеней равно значению , вычисленному по формуле (2.26):

. (2.29)

Таким образом, для каждой пары текущих значений  и  определяют значения

 (2.30)

Метод Рунге-Кутта имеет порядок точности  на всем отрезке [а,b]. Оценка точности этого метода очень затруднительна. Грубую оценку погрешности можно получить с помощью "двойного просчета" по формуле

, (2.31)

где  - значение точного решения уравнения (2.23) в точке  а  и  - приближенные значения, полученные с шагом *h/2* и *h*.

Если  - заданная точность решения, то число n (число делений) для определения шага интегрирования  выбирается таким образом, чтобы

. (2.32)

Однако шаг расчета можно менять при переходе от одной точки к другой.

Для оценки правильности выбора шага *h* используют равенство

, (2.33)

где *q* должно быть равно нескольким сотым, в противном случае шаг *h* уменьшают.

Метод Рунге-Кутта может быть применен и к решению систем дифференциальных уравнений.

Пусть задана система дифференциальных уравнений первого порядка

 (2.34)

с начальными условиями

, , . (2.35)

В этом случае параллельно определяются числа  и :

 (2.36)

где ;

;

;

;

;

;

;

.

Тогда получим решение системы

, . (2.37)

***Экстраполяционный метод Адамса***

При решении дифференциального уравнения методом Рунге-Кутта необходимо производить много вычислений для нахождения каждого. В том случае, когда правая часть уравнения сложное аналитическое выражение, решение такого уравнения методом Рунге-Кутта вызывает большие трудности. Поэтому на практике применяется метод Адамса, который не требует многократного подсчета правой части уравнения.

Пусть дано дифференциальное уравнение

, (2.38)

с начальным условием

, . (2.39)

Требуемся найти решение этого уравнения на отрезке [a.b].

Разобьем отрезок [a,b] на n равных частей точками    
(*i = 1, 2,..., n*), a  – проинтегрируем дифференциальное уравнение). Выберем участок  и проинтегрируем дифференциальное уравнение (2.38); тогда получим

,

или

. (2.40)

Для нахождения производной воспользуемся второй интерполяцион­ной формулой Ньютона (ограничиваясь при этом разностями третьего по­рядка):

. (2.41)

или

. (2.42)

Подставляя выражение для  из формулы (2.42) в соотношение (2.40) и учитывая, что , имеем

 (2.43)

Обозначим в дальнейшем  (*i = 0,1,2,…,n*).

Тогда для любой разности имеем  и

. (2.44)

По формуле  получаем решение уравнения. Формула (2.44) носит название *экстраполяционной формулы Адамса*.

Для начала процесса нужны четыре начальных значения  - так называемый *начальный отрезок*, который может быть найден, исходя из начального условия (2.39) с использованием одного из известных методов. Обычно начальный отрезок решения находится методом Рунге-Кутта.

Зная  можно определить

; ;

; . (2.45)

Далее составляется таблица разностей величины *q* (табл. 7).

Таблица 7. Таблица разностей величины *q*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| I |  |  |  |  |  |  |  |  |
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) |
| 0 |  |  | - |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  | - |  |  |  |  | - |
| 2 |  |  | - |  |  |  | - | - |
| 3 |  |  |  |  |  | - | - | - |
| 4 |  |  | - | - | - | - | - | - |
| 5 |  | - | - | - | - | - | - | - |
| 6 |  | - | - | - | - | - | - | - |

Метод Адамса заключается в продолжении диагональной таблицы разностей с помощью формулы (2.44). Используя числа , которые располагаются в таблице по диагонали, полагая в формуле (2.44)  
 *n = 3* (известное последнее значение *у* есть ), получаем:

.

Полученное значение  вносят и таблицу и находят . Затем используя значения  и  находят  т.е. получается новая диагональ. По этим данным вычисляют

 .

Таким образом, продолжают таблицу решения, вычисляя правую часть дифференциального уравнения (2.38) на каждом этапе только один раз.

Для грубой оценки погрешности применяют **принцип Рунге**, который состоит в следующем:

1. Находят решение дифференциального уравнения при шаге *h*.
2. Значение шага удваивают и находят решение при шаге *Н = 2h*.

3. Вычисляют погрешность метода по формуле

, (2.46)

где  - значение приближенного вычисления при двойном шаге *H=2h*;  - значение приближенного вычисления при шаге *h*.

Метод Адамса применяется также и для решения систем дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений *n*-гo порядка.

Пусть задана система двух уравнений

 (2.47)

Тогда экстраполяционные формулы Адамса для этой системы имеют вид

 (2.48)

где   и ,

.

3. **Объекты исследования, оборудование, материалы и наглядные пособия**

Объектом исследования данной работы является метод численного решения дифференциальных уравнений.

Для выполнения работы необходимы ПК и соответствующее программное обеспечение:

- MS WINDOWS;

- Visual Studio (любая другая оболочка языка высокого уровня);

- MS Office (для оформления отчета).

4. **Задание на работу (рабочее задание)**

1. Изучить методы решения дифференциальных уравнений в соответствии с вариантом.
2. Разработать ПО для решения дифференциальных уравнений заданными методами.
3. Провести сравнение указанных методов.

**5. Ход работы (порядок выполнения работы)**

Для выполнения практической работы необходимо:

1) Ознакомиться с теоретической справкой;

2) Выполнить анализ поставленной задачи, выявить входную и выходную информацию и определить ее формат;

3) Разработать алгоритм решения задачи;

4) Разработать программное обеспечение;

5) Представить ПО преподавателю и получить допуск к защите работы;

6) Оформить отчет по практической работе;

7) Защитить работу преподавателю, ответив на вопросы по ее содержанию и выполнению.

6. **Содержание отчета**

В отчете должны присутствовать следующие пункты:

1) задание;

2) математическое описание методов;

3) описание входных – выходных данных;

4) алгоритмы решения дифференциальных уравнений;

5) текст программы (подпрограммы) расчета;

6) распечатка результатов работы программы;

7) проверка корректности работы программы.

8) сравнительный анализ методов решения дифференциальных уравнений по критериям точности, вычислительной сложности.

Задания по вариантам

Решить дифференциальное уравнение заданными методами:

1. Метод Эйлера
2. Метод Адамса
3. Метод Рунге-Кутта

Задание по вариантам

1. Методы 1,2на отрезке [a,b], c шагом h
2. Методы 2,3 на отрезке [a,b], c шагом h
3. Методы 1,3 на отрезке [a,b], c шагом h
4. Методы 1,2 на отрезке [a,b], c шагом h
5. Методы 2,3 на отрезке [a,b], c шагом h
6. Методы 1,3 на отрезке [a,b], c шагом h
7. Методы 1,2 на отрезке [a,b], c шагом h
8. Методы 2,3 на отрезке [a,b], c шагом h
9. Методы 1,3 на отрезке [a,b], c шагом h
10. Методы 1,2 на отрезке [a,b], c шагом h
11. Методы 2,3 на отрезке [a,b], c шагом h
12. Методы 1,3 на отрезке [a,b], c шагом h
13. Методы 1,2 на отрезке [a,b], c шагом h
14. Методы 2,3 на отрезке [a,b], c шагом h
15. Методы 1,3 на отрезке [a,b], c шагом h
16. Методы 1,2 на отрезке [a,b], c шагом h
17. Методы 2,3 на отрезке [a,b], c шагом h
18. Методы 1,3 на отрезке [a,b], c шагом h
19. Методы 1,2 на отрезке [a,b], c шагом h
20. Методы 2,3 на отрезке [a,b], c шагом h
21. Методы 1,3 на отрезке [a,b], c шагом h
22. Методы 1,2 на отрезке [a,b], c шагом h
23. Методы 2,3 на отрезке [a,b], c шагом h
24. Методы 1,3 на отрезке [a,b], c шагом h
25. Методы 1,2 на отрезке [a,b], c шагом h
26. Методы 2,3 на отрезке [a,b], c шагом h
27. Методы 1,3 на отрезке [a,b], c шагом h
28. Методы 1,2 на отрезке [a,b], c шагом h
29. Методы 2,3 на отрезке [a,b], c шагом h
30. Методы 1,3 на отрезке [a,b], c шагом h

7. **Список использованных источников**

1. Пирумов, У.Г. Численные методы / У.Г. Перумов. – М.: Дрофа, 2007. – 222 с.
2. Математика : практикум по численным методам / Белорус. нац. техн. ун-т, Каф. "Высшая математика №1"; сост. :А.В.Грекова [и др.] .— Минск, 2006 .— 127с. — Библиогр.в конце кн. — ISBN 985-479-453-9